

論以中醫五行生剋理論建立五臟功能運行的數學模型

楊義清¹，林志銘¹，陳耀煌²

摘要

本研究嘗試以中醫五行生剋理論為基礎，建立一個能夠描述五臟功能動態變化的數學模型。五行理論中，肺、肝、腎、心、脾分別對應金、木、水、火、土，透過彼此間的「相生」與「相剋」作用來體現臟腑功能之間的調節與互動。研究中將這些作用關係表示成一組五臟功能運行指數 $x_N(t)$ 的線性常微分方程組，並推導出解析解的可能形式。結果指出由於模型中會存在特徵值實部為正的情況，方程組的解將呈指數發散，導致五臟功能指數超出正常範圍 $[0, 1]$ ，與實際生理意義相矛盾；數值模擬亦證實此一結果。不過，本研究初步展示了傳統中醫理論與現代數學建模整合的可能性，為中醫理論的現代詮釋與應用研究開啟嶄新方向。

關鍵字：器官間訊息交流、中醫五行生剋理論

¹楊義清(通訊作者)，國立臺東大學應用科學系教授、E-mail: icyang@nttu.edu.tw

¹林志銘，國立臺東大學應用科學系副教授、E-mail: cmlin@nttu.edu.tw

²陳耀煌，國立高雄科技大學電子工程系(第一校區)、E-mail: yhchen1963@nkust.edu.tw

Constructing a Mathematical Model for Zang Organ Function Based on Wu Xing Generation and Control Theory in Traditional Chinese Medicine

I-Ching Yang¹, Chih-Ming Lin¹, and Yaw-Hwang Chen²

Abstract

This paper presents a mathematical model aimed at describing the dynamic functional interactions among the five Zang organs, based on Wu Xing generation and control theory in Traditional Chinese Medicine. In this theory, the Lung, Liver, Kidney, Heart, and Spleen correspond to Metal, Wood, Water, Fire, and Earth, respectively. Their mutual "generation" (sheng) and "control" (ke) relationships represent the regulation and interaction among Zang organ functions. These relationships are expressed as a system of linear ordinary differential equations for the functional indices $x_N(t)$ of the five Zang organs, and the analytical form of the solution is derived. The results indicate that, due to the presence of eigenvalues with positive real parts, the solution diverges exponentially, causing the Zang organ function indices to exceed the physiological range of $[0, 1]$, which contradicts actual biological meaning. Numerical simulations also confirm this outcome. Nevertheless, this study preliminarily demonstrated the feasibility of combining Traditional Chinese Medicine theory with modern mathematical modeling and provided a new direction for the interpretation and applied research of Traditional Chinese medicine.

Keywords: Organ Crosstalk, Wu Xing Generation and Control Theory in Traditional Chinese Medicine

¹ I-Ching Yang (corresponding author), Professor, Department of Applied Science, National Taitung University. E-mail: icyang@nttu.edu.tw

¹ Chih-Ming Lin, Associate Professor, Department of Applied Science, National Taitung University. E-mail: cmlin@nttu.edu.tw

² Yaw-Hwang Chen, Associate Professor, Department of Electronic Engineering, National Kaohsiung University of Science and Technology (First Campus). E-mail: yhchen1963@nkust.edu.tw

壹、前言與文獻探討

近年來，西方醫學研究上日益重視「器官間訊息交流(organ crosstalk)」這個概念(Husain-Syed, McCullough, Birk, Renker, Brocca, Seeger, & Ronco, 2015)，指出人體內臟器官並非各自獨立運作，而是透過神經、免疫與內分泌路徑形成複雜的訊息網絡，協同維持生理上的穩定態。例如，腦腸軸(gut-brain axis)揭示了腸道菌叢與中樞神經之間的雙向調控，顯示情緒與腸道健康密切相關(Wang & Kasper, 2014; Mayer, Knight, Mazmanian, Cryan, & Tillisch, 2014)；腸肝軸(gut-liver axis)則強調腸道屏障與肝臟代謝功能的交互影響(Albillos, de Gottardi, & Rescigno, 2020)；腸肺軸(gut-lung axis)亦逐漸受到關注，特別在呼吸道感染與慢性肺病中的角色(Dang, & Marsland, 2019)。尤其是肝腎軸(hepatobiliary-renal axis)(Ginès, Guevara, Arroyo, & Rodés, 2003)與心腎軸(Cardiorenal axis)(Virzi, Clementi, & Ronco, 2016)之間的生理交互，更是在器官衰竭與代償反應中佔據關鍵地位。這些系統性互動的研究不僅開啟我們對人體生理調控的理解，也為整合性醫療、慢性病管理提供了嶄新契機。

在西方醫學揭示器官間複雜交互作用的同時，中醫理論亦早已提出臟腑之間「相生相剋」的動態關係，並以五行生剋理論建構出完整的功能性整體觀。五臟之間透過生剋制化達成生理平衡，與現代醫學中所謂「器官間訊息交流」具有高度對應性。因此，若能將中醫五行生剋的系統性觀點以現代數學語言加以形式化，不僅有助於理論的現代詮釋，也可能為器官交談的研究提供新穎的系統建模途徑。本研究嘗試建構一套以五行生剋關係為基礎的五臟功能動態數學模型，旨在提供一個理論架構來探討進一步拓展整合醫學的量化研究可能性。

五行生剋理論是中醫建構整體性醫學觀的核心基礎之一，其將自然界的五種基本元素：金、木、水、火、土，將之對應於五臟系統中的肺、肝、腎、心、脾。根據明代張介賓《類經圖翼·運氣》所載(張介賓, 1999)：

故自其相生者言，則水以生木，木以生火，火以生土，土以生金，金以生水。
自其相克者言，則水能克火，火能克金，金能克木，木能克土，土能克水。

因此，五臟之間透過「相生」與「相剋」兩大作用機制維持動態平衡，「相生」指的是一種促進與支持關係，如木生火、火生土等；相剋則指制約與抑制關係，如木剋土、火剋金等，五行生剋關係如圖一所示。在人體生理層面，這種關係體現為臟腑功能之間的調節與互動，從而達到整體協調與病理防衛的目的。在中醫理論，五行生剋理論不僅解釋了五臟之間的功能互依，還能被運用於反映人體與自然環境間的連動性，當然這個環節在本文裡還不會被納入考慮。當五臟中某一器官功能過強或過弱時，將影響其生剋鏈中的其他器官，進而產生連鎖反應導致疾病的發生。本文中，我們將變數 $N \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 依序地象徵五臟：肺(金)、肝(木)、腎(水)、心(火)、脾(土)，因此變數 $x_N(t)$ 則分別代表五臟的功能運行指數，並要求代表五臟的正常生理範圍為 $[0, 1]$ 。

貳、研究方法與結果

中醫五行生剋理論中，除了存在「相生」與「相剋」的動態平衡機制外，另有因五臟之間的生剋關係失衡，從而產生的「相乘」與「相侮」的複雜互動機制。圖二中以肺臟為例介紹了「生剋乘侮」的病理變化，但在此我們先考慮僅以「相生」與「相剋」來建立動態數學模型。從圖二所示，『土生金』表示屬金的肺臟功能 $x_1(t)$ 會受到屬土的脾臟功能 $x_5(t)$ 所影響，產生相生作用 $ax_5(t)$ ， a 象徵相生作用的強度；『火剋金』表示肺臟會受到屬火的心臟功能 $x_4(t)$ 所影響產生相剋作用 $-bx_4(t)$ ， b 象徵相剋作用的強度。據此，肺臟功能運行指數的變化可以微分方程式表示為

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = ax_5(t) - bx_4(t) \quad (1)$$

對於肝臟、腎臟、心臟與脾臟功能運行指數的變化則是將之與肺臟的情況視為一致的，也就是使用相同的相生作用的強度 a 與相剋作用的強度 b ，所以這四臟均可依循中醫五行生剋理論分別表示成微分方程式：

$$\frac{dx_2(t)}{dt} = ax_3(t) - bx_1(t) \quad (2)$$

$$\frac{dx_3(t)}{dt} = ax_1(t) - bx_5(t) \quad (3)$$

$$\frac{dx_4(t)}{dt} = ax_2(t) - bx_3(t) \quad (4)$$

$$\frac{dx_5(t)}{dt} = ax_4(t) - bx_2(t) \quad (5)$$

下面將五臟功能運行指數考慮為 1×5 列向量

$$\mathbf{x}(t) = [x_1(t) \ x_2(t) \ x_3(t) \ x_4(t) \ x_5(t)] \quad (6)$$

則 Eq.(1) - (5) 可改寫成

$$\frac{d}{dt} \mathbf{x}^T(t) = \mathbf{A} \mathbf{x}^T(t) \quad (7)$$

其中 $\mathbf{x}^T(t)$ 為 5×1 行向量，而

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -b & a \\ -b & 0 & a & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & 0 & -b \\ 0 & a & -b & 0 & 0 \\ 0 & -b & 0 & a & 0 \end{bmatrix} \quad (8)$$

由於 Eq.(7) 是一矩陣微分方程，想要找出 $\mathbf{x}^T(t)$ 的解析解，可以先試著將矩陣 \mathbf{A} 對角化。

假設存在一變換矩陣 \mathbf{P} (invertible matrix)可進行相似轉換(similarity transformation)

$$\mathbf{PAP}^{-1} = \mathbf{D} \quad , \quad (9)$$

則有對角矩陣 (diagonal matrix) 為

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_5 \end{bmatrix} \quad . \quad (10)$$

因此, Eq.(7)將可轉換成

$$\frac{d}{dt} \mathbf{P}\mathbf{x}^T(t)\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{PAP}^{-1}\mathbf{P}\mathbf{x}^T(t)\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{D}\mathbf{P}\mathbf{x}^T(t)\mathbf{P}^{-1} \quad , \quad (11)$$

引入一個新的行向量

$$\mathbf{y}^T(t) = \mathbf{P}\mathbf{x}^T(t)\mathbf{P}^{-1} \quad , \quad (12)$$

最後 Eq.(11) 將成為

$$\frac{d}{dt} \mathbf{y}^T(t) = \mathbf{D}\mathbf{y}^T(t) \quad , \quad (13)$$

若以分量來表示的話, 就成為

$$\frac{dy_N(t)}{dt} = \lambda_N y_N(t) \quad , \quad (14)$$

然後就可以獲得

$$y_N(t) = y_{N0} \exp(\lambda_N t) \quad . \quad (15)$$

所以想解出 $x_N(t)$, 必然要先設法求出 λ_N 及 \mathbf{P} 。

利用行列式

$$\det|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{1}| = 0 \quad , \quad (16)$$

可以得出特徵值所滿足的方程式

$$\lambda^5 - 5ab^2\lambda^2 + 5a^3b\lambda - (a^5 - b^5) = 0 \quad . \quad (17)$$

Eq.(16) 是 λ 的五次方程式, 通常會有一個實數根及四個複數根, 所以我們設

$$\lambda_n = \alpha_n + i\beta_n \quad , \quad (18)$$

其中 $\beta_{n=5} = 0$ (唯一的實數根)。對於 $y_N(t)$ 的解即可表示為

$$y_n(t) = y_{n0} e^{\alpha_n t} e^{i\beta_n t} \quad . \quad (19)$$

根據 Eq.(12), 五臟功能運行指數則為

$$\mathbf{x}^T(t) = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{y}^T(t)\mathbf{P} \quad , \quad (20)$$

其分量形式可被表示為

$$x_N(t) = \sum_n \sum_m \mathbf{P}_{nm} \mathbf{P}_{mN} y_n(t) \quad . \quad (21)$$

若設

$$Q_{nN} = \sum_m \mathbf{P}_{nm} \mathbf{P}_{mN} \quad , \quad (22)$$

可以發現 $x_N(t)$ 將會是 $y_n(t)$ 的線性疊加

$$x_N(t) = \sum_n Q_{nN} y_{n0} e^{\alpha_n t} e^{i\beta_n t} \quad . \quad (23)$$

從 Eq.(23) 的形式來看, 只要存在有 $\alpha_n > 0$, $e^{\alpha_n t}$ 將導致

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_N = \pm \infty \quad , \quad (24)$$

這個結果將造成 $x_N > 1$ 的矛盾, 使得用來描述五臟運行的數學模型無法運作。最後, 我們用數值方法來進行五臟運行的數學模型計算, 假設相生作用的強度 $a = 0.012$ 及相剋作用的強度 $b = 0.015$, 並給出五臟運行的起始狀態為 $\mathbf{x}(0) = [0.81 \quad 0.71 \quad 0.79 \quad 0.87 \quad 0.75]$ 。計算出來的 $x_N(t)$ 如圖三所示。結果顯示運算經過 500 次的迭代後均會發散, 符合上段文章所評估的結果。

參、討論與結論

本文以中醫五行生剋理論為基礎, 建構出一組描述五臟功能運行的線性微分方程系統, 嘗試以數學形式來呈現五行理論中「相生」與「相剋」的交互作用。透過矩陣對角化方法與解析解推導, 我們發現由於模型中會存在實部為正的特徵值, 則解的指數增長特性將導致五臟功能指數發散, 與實際生理範圍 $[0, 1]$ 產生矛盾, 顯示此模型初步尚無法穩定描述五臟平衡狀態。進一步的數值模擬也證實了此預測結果, 系統在有限步驟內即出現發散現象。從本文所建構的數學模型中, 『土生金』的相生作用僅是脾臟功能 $x_5(t)$ 決定肺臟功能 $x_1(t)$ 的增加, 而『火剋金』的相剋作用也僅是心臟功能 $x_4(t)$ 決定肺臟功能 $x_1(t)$ 的減少, 很顯然這樣的解讀難以充分反映實際生理動態。不過, 本研究初步展示了傳統中醫理論與現代數學建模整合的可能性, 為中醫理論的現代詮釋與應用研究開啟嶄新方向。

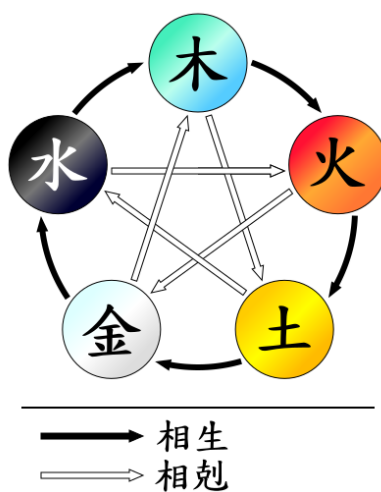


圖 1. 五行生剋圖

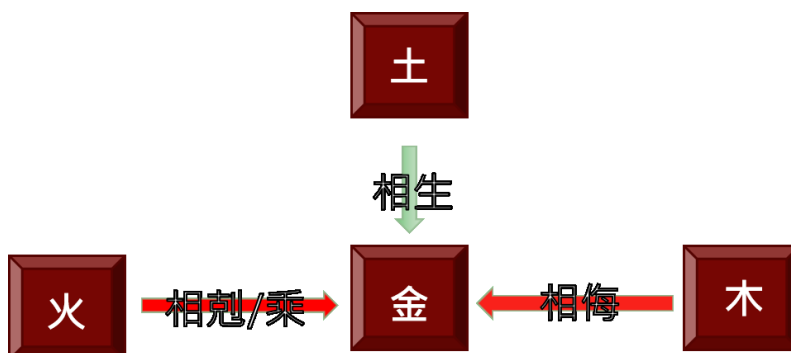


圖 2. 肺臟的生剋乘侮（本文只考慮相生相剋兩種機制）

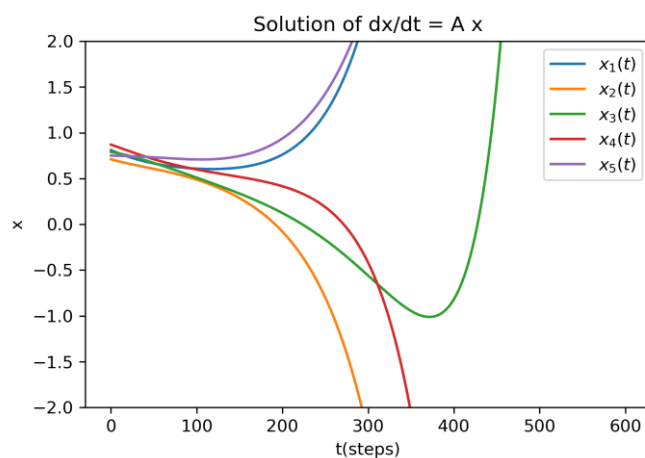


圖 3. 五臟生剋數學模型的模擬結果

致謝

作者(楊義清)感謝張益鋒在五臟生剋數學模型模擬的協助。

引用文獻

一、中文部分

(明)張介賓 (1999)。類經圖翼。見李志庸主編，《張景岳醫學全書》(頁 625)。北京：人民中醫藥出版社。

二、外文部分

Albillos, A., De Gottardi, A., & Rescigno, M. (2020). The gut-liver axis in liver disease: Pathophysiological basis for therapy. *Journal of hepatology*, 72(3), 558-577.

Dang, A. T., & Marsland, B. J. (2019). Microbes, metabolites, and the gut-lung axis. *Mucosal immunology*, 12(4), 843-850.

Ginès, P., Guevara, M., Arroyo, V., & Rodés, J. (2003). Hepatorenal syndrome. *The Lancet*, 362(9398), 1819-1827.

Husain-Syed, F., McCullough, P. A., Birk, H. W., Renker, M., Brocca, A., Seeger, W., & Ronco, C. (2015). Cardio-pulmonary-renal interactions: a multidisciplinary approach. *Journal of the American College of Cardiology*, 65(22), 2433-2448.

Mayer, E. A., Knight, R., Mazmanian, S. K., Cryan, J. F., & Tillisch, K. (2014). Gut microbes and the brain: paradigm shift in neuroscience. *Journal of Neuroscience*, 34(46), 15490-15496.

Virzi, G. M., Clementi, A., & Ronco, C. (2016). Cellular apoptosis in the cardiorenal axis. *Heart failure reviews*, 21, 177-189.

Wang, Y., & Kasper, L. H. (2014). The role of microbiome in central nervous system disorders. *Brain, behavior, and immunity*, 38, 1-12.